OM REGNING MED

LINEÆRE TRANSFORMATIONER

AF

J. HJELMSLEV

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række, naturv. og mathematisk Afd. VI. 7

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1911

INDLEDNING.

De Talformer, man fortrinsvis har undersøgt, er saadanne, hvor hvert Tal kan siges at fremstille en Parallelforskydning i et Euklidisk Rum (med et vilkaarligt Antal Dimensioner), og hvor Tallenes Addition svarer til Sammensætning af saadanne Parallelforskydninger.

Mere almindeligt kunde man behandle Transformationerne i en vilkaarlig Gruppe som Numeraler, hvis Addition bestemmes ved Transformationernes Sammensætning; det maa da forudsættes, at naar Gruppen indeholder én Transformation, den da ogsaa indeholder den omvendte, altsaa ogsaa Identiteten, der betegnes med 0.

Dersom nu en saadan Gruppes Transformationer i specielle Tilfælde er cykliske, og én af disse cykliske Transformationer er A, for hvilken altsaa $A + A + A + \ldots$ (n Gange) $= 0$, men A selv forskellig fra 0, da kan man straks indsé, at der ikke vil kunne opstilles nogen Multiplikationsregel, der tilfredsstiller ét af de distributive Principper, f. Eks. det, der udtrykkes ved Ligningen $M \cdot (P + Q) = M \cdot P + M \cdot Q$, uden at Division med A i Almindelighed bliver umulig. Thi for det første vil Ligningen $M \cdot (P + 0) = M \cdot P + M \cdot 0$ medføre, at $M \cdot 0 = 0$, og dernæst vil

$$M \cdot A + M \cdot A + \ldots (n \text{ Gange}) = M \cdot (A + A + \ldots) = M \cdot 0 = 0;$$

altsaa maa $M \cdot A$ fremstille en cyklisk Transformation (eller 0). Ligningen $M \cdot A = B$, hvor B er vilkaarlig, vilde altsaa i Almindelighed ikke faa nogen Løsning med Hensyn til M.

Da nu de i Videnskabernes Selskabs mathematiske Prisopgave for 1905 omhandlede Numeraler fremstiller lineære brudne Transformationer, hvis Sammensætning definerer Numeralernes Addition, og da der blandt disse lineære Transformationer findes uendelig mange cykliske Transformationer (af en hvilken som helst Orden), har denne Opgave i Virkeligheden gennem ovenstaaende Bemærkning faaet en foreløbig Besvarelse; hvilken Multiplikationsregel man end vilde opstille, vilde der nemlig altid findes en saadan Mangfoldighed af Tilfælde, i hvilke Division vilde blive umulig, at man ikke kunde betragte en saadan Multiplikationsregel som tilfredsstillende.

I det følgende skal vi nu imidlertid behandle Spørgsmaalet noget nærmere, idet vi undersøger de Multiplikationsregler, der i det hele taget kan opstilles for de omtalte Numeraler, under Forudsætning af, at ét af de distributive Principper fastholdes.

Om Numeralernes Addition.

1. Det i THIELE's Afhandling: Om Definitionerne af Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser (Vidensk. Selskabs Skrifter, 6. Række, naturv. og math. Afd. II, 11, 1886, Pag. 508) definerede Numeral af Formen

$$(\xi)^{\mathrm{I}} * (\eta)^{\mathrm{II}} * (\zeta)^{\mathrm{III}}$$

fremstiller en bestemt lineær Transformation

$$x = \frac{ax' + b}{cx' + d},$$

sammensat af de 3 efter hinanden følgende Transformationer:

$$\frac{z - w}{z - u} = \zeta \cdot \frac{x' - w}{x' - u},$$

$$\frac{y - v}{y - w} = \eta \cdot \frac{z - v}{z - w},$$

$$\frac{x - u}{x - v} = \xi \cdot \frac{y - u}{y - v}.$$

Til Udførelsen af saadanne Numeralers Addition finder man foruden Loven $(\xi_1)^{\mathrm{I}} * (\xi_2)^{\mathrm{I}} = (\xi_1 \xi_2)^{\mathrm{I}}$, og de analoge for Indices II og III, l. c. angivet følgende Regler:

$$(\xi)^{\mathrm{I}} * (\eta)^{\mathrm{II}} = \left(\frac{\eta}{\xi + \eta - \xi\eta}\right)^{\mathrm{II}} * \left(\frac{\xi}{\xi + \eta - \xi\eta}\right)^{\mathrm{I}},$$

$$(\eta)^{\mathrm{II}} * (\xi)^{\mathrm{I}} = \left(\frac{\xi + \eta - 1}{\eta}\right)^{\mathrm{I}} * \left(\frac{\xi + \eta - 1}{\xi}\right)^{\mathrm{II}},$$

og dem, som man kan danne heraf ved de samtidige Kredsforskydninger $(\xi \eta \zeta)$ og (I II III).

Hertil er nu at bemærke, at Numeralet $(\xi)^{\mathrm{I}} * (\eta)^{\mathrm{II}} * (\zeta)^{\mathrm{III}}$ ikke vil have nogen bestemt Betydning, naar 2 af Størrelserne ξ, η og ζ er 0 eller ∞, og som Følge af denne Omstændighed viser det sig, at der gives uendelig mange Tilfælde, hvor 2 af de definerede Numeraler ikke ved den angivne Addition kan siges at give et nyt Numeral af samme Art.

Vil man f. Eks. forsøge at danne Summen:

$$\left((2)^{\mathrm{I}} * (2)^{\mathrm{II}} * (2)^{\mathrm{III}}\right) * \left((2)^{\mathrm{I}} * (2)^{\mathrm{II}} * (2)^{\mathrm{III}}\right),$$

faar man ved Anvendelse af ovennævnte Formler

$$(\infty)^{\mathrm{I}} * (1)^{\mathrm{I}} * (\infty)^{\mathrm{III}},$$

et Resultat, der imidlertid i sig selv er uden Betydning.

2. I alle Spørgsmaal, der angaar Numeralernes Addition, kan man uden at gøre Indgreb i Undersøgelsens Almindelighed antage specielle Værdier for u, v og w (Dobbeltværdierne for de 3 Transformationer I, II og III). Vi sætter derfor:

$$u = 0, \quad v = 1, \quad w = \infty;$$

en let Regning fører da til det Resultat, at Numeralet $(\xi)^{\mathrm{I}} * (\eta)^{\mathrm{II}} * (\zeta)^{\mathrm{III}}$ fremstiller den lineære Transformation:

$$x = \frac{\xi\eta x' + \xi\zeta(1-\eta)}{(\xi-1)\eta x' + \zeta(\xi+\eta-\xi\eta)}. \tag{1}$$

For at en given Transformation

$$x = \frac{ax'+b}{cx'+d}, \tag{2}$$

hvor $ad-bc \neq 0$, skal kunne fremstilles ved Numeralet $(\xi)^{\mathrm{I}} * (\eta)^{\mathrm{II}} * (\zeta)^{\mathrm{III}}$, maa ξ, η og ζ altsaa kunne tillægges saadanne egentlige Værdier (forskellige fra 0 og ∞), at Transformationerne (1) og (2) bliver identiske.

Dette kan imidlertid ikke lade sig gøre, naar et af følgende Tilfælde indtræffer:

$$1)\ a = 0, \quad 2)\ a = c, \quad 3)\ b = d,$$

hvorimod man i alle andre Tilfælde faar følgende Værdier for ξ, η og ζ:

$$\xi = \frac{a}{a-c}, \quad \eta = \frac{a(d-b)}{ad-bc}, \quad \zeta = \frac{d-b}{a-c}.$$

3. Vi vil nu undersøge, i hvilke Tilfælde Numeralerne $(\xi)^{\mathrm{I}} * (\eta)^{\mathrm{II}} * (\zeta)^{\mathrm{III}}$ og $(\xi_1)^{\mathrm{I}} * (\eta_1)^{\mathrm{II}} * (\zeta_1)^{\mathrm{III}}$ ikke vil kunne adderes saaledes, at man faar et nyt Numeral af samme Form.

De givne Numeraler antages at fremstille Transformationerne:

$$x = \frac{ax'+b}{cx'+d}, \text{ og } x_1 = \frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1};$$

anvendes disse efter hinanden, faar man Transformationen:

$$x_1 = \frac{(aa_1+cb_1)x' + ba_1 + db_1}{(ac_1+cd_1)x' + bc_1 + dd_1},$$

der altsaa skal svare til Summen af de to givne Numeraler. Men den fundne Transformation kan i Følge 2 ikke fremstilles ved et Numeral af den omtalte Form i følgende Tilfælde

$$1)\ aa_1 + cb_1 = 0, \quad \text{altsaa } \xi\eta_1 + \zeta_1(1-\eta_1)(\xi-1) = 0, \tag{A}$$

$$2)\ a(a_1-c_1) = c(d_1-b_1), \quad \text{altsaa } \xi = (\xi-1)\zeta_1, \tag{B}$$

$$3)\ b(a_1-c_1) = d(d_1-b_1), \quad \text{altsaa } \xi(1-\eta) = (\xi+\eta-\xi\eta)\zeta_1. \tag{C}$$

I ethvert af disse Tilfælde, naar altsaa blot én af Relationerne (A), (B) og (C) finder Sted, er Addition af de givne Numeraler altsaa umulig.

Det tidligere nævnte Eksempel, hvor $\xi = \eta = \zeta = \xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 2$, falder ind under Tilfældet (B).

4. Paa Grund af de Vanskeligheder, der saaledes lægger sig i Vejen for explicite Regning med de treleddede Numeraler $(\xi)^{\mathrm{I}} * (\eta)^{\mathrm{II}} * (\zeta)^{\mathrm{III}}$, vil vi indføre den almindelige lineære Transformation som Numeral, tilmed da man derved i det hele faar et bedre Overblik over Undersøgelserne.

Transformationen

$$x = \frac{ax' + b}{cx' + d}$$

betegnes ved Numeraltegnet

$$\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix},$$

og Numeralernes Addition (Sammensætning af Transformationerne) bestemmes i F. 3 ved Ligningen:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 + cb_1 & ba_1 + db_1 \\ ac_1 + cd_1 & bc_1 + dd_1 \end{pmatrix}.$$

Idet de givne Transformationer er egentlige ɔ: $ad - bc \neq 0$, og $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$, har man ogsaa, at den nye Transformation er egentlig, idet:

$$(aa_1 + cb_1)(bc_1 + dd_1) - (ba_1 + db_1)(ac_1 + cd_1) = (ad - bc)(a_1 d_1 - b_1 c_1).$$

Alle de Transformationer, vi behandler, forudsættes nu at være egentlige.

Den identiske Transformation er

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

der betegnes med 0.

Den modsatte Transformation til $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ er:

$$\div \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Transformationen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kaldes i n v o l u t o r i s k, naar $a + d = 0$; Transformationen er i dette Tilfælde = den modsatte Transformation. Denne Egenskab tilkommer ogsaa den identiske Transformation.

5. I mange Tilfælde vil det være nyttigt ved Behandling af en ikke-identisk Transformation $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ at indføre Transformationens Dobbeltværdier ξ_1 og ξ_2, der findes som Rødder i Ligningen

$$x = \frac{ax + b}{cx + d},$$

altsaa

$$cx^2 + (d - a)x - b = 0.$$

Idet vi forudsætter, at Transformationen er o r d i n æ r, ɔ: $\xi_1 \neq \xi_2$, kan den fremstilles paa Formen:

$$\frac{x - \xi_1}{x - \xi_2} = \lambda \cdot \frac{x' - \xi_1}{x' - \xi_2}.$$

Her kaldes λ Transformationens eller Numeralets Indeks, medens ξ_1 og ξ_2 kaldes Transformationens eller Numeralets Rødder. Selve Numeralet (eller Transformationen) betegnes med $(\xi_1, \xi_2)_\lambda$, saa at man har

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2)_\lambda.$$

Naar $\lambda = -1$, er Transformationen (Numeralet) involutorisk, idet man har:

$$(\xi_1, \xi_2)_{-1} + (\xi_1, \xi_2)_{-1} = 0.$$

2 Numeraler med samme Rødder adderes ved, at man multiplicerer Indices:

$$(\xi_1, \xi_2)_\lambda + (\xi_1, \xi_2)_\mu = (\xi_1, \xi_2)_{\lambda\mu}.$$

6. Dersom Numeralet $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ har sammenfaldende Rødder, kaldes det singulært. Det kan da bedst fremstilles som en Sum af involutoriske Numeraler. Antages de sammenfaldende Dobbeltværdier at være ξ, medens Transformationen fører Tallet $\alpha (\neq \xi)$ over i β, antages endvidere γ at være en saadan Værdi, at ξ og γ er harmonisk forbundne med α og β, da har man:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\xi, \gamma)_{-1} + (\xi, \alpha)_{-1}.$$

For det første ses det nemlig, at ξ er den eneste Værdi, der holder sig uforandret efter de to Transformationer $(\xi, \alpha)_{-1}$ og $(\xi, \gamma)_{-1}$, og dernæst vil α ved Transformationen $(\xi, \alpha)_{-1}$ holde sig uforandret og ved Transformationen $(\xi, \gamma)_{-1}$ gaa over til β. Disse Betingelser er tilstrækkelige til at vise Ligningens Rigtighed.

Omvendt har man altid, at 2 involutoriske Numeraler, der har én enkelt Rod α fælles, ved Addition giver et singulært Numeral med Dobbeltroden α. Et singulært Numeral kan aldrig være involutorisk.

7. Et vilkaarligt ordinært Numeral $(\xi_1, \xi_2)_\lambda$ kan ogsaa opløses i 2 involutoriske Numeraler.

Vi vælger 2 forskellige Værdier a_1 og a_2, som er harmonisk forbundne med ξ_1 og ξ_2, og søger 2 andre Værdier b_1 og b_2, saaledes at

$$(\xi_1, \xi_2)_\lambda = (b_1, b_2)_{-1} + (a_1, a_2)_{-1}.$$

Da Transformationen $(a_1, a_2)_{-1}$ ombytter ξ_1 og ξ_2, maa disse Størrelser ogsaa ombyttes ved Transformationen $(b_1, b_2)_{-1}$, d. v. s. b_1 og b_2 skal være harmonisk forbundne med ξ_1 og ξ_2. (Naar denne Betingelse er opfyldt, da vil $(b_1, b_2)_{-1} + (a_1, a_2)_{-1}$ nødvendigvis fremstille en Transformation med Rødderne ξ_1 og ξ_2).

Dersom nu den givne Transformation $(\xi_1, \xi_2)_\lambda$ fører a_1 over i a_1', da maa $(b_1, b_2)_{-1}$ ogsaa føre a_1 over i a_1'; men deraf følger, at b_1 og b_2 skal være harmonisk forbundne med a_1 og a_1', og da de ogsaa skal være harmonisk forbundne med ξ_1 og ξ_2, er de hermed éntydig bestemte.

Tillige ser man, at 2 involutoriske Numeraler, der ikke har nogen Rod fælles, ved Addition giver et ordinært Numeral, hvis Rodpar er harmonisk forbundne med begge de givne Numeralers Rodpar.

Er $\lambda = -1$, vil Ligningen

$$(\xi_1, \xi_2)_{-1} = (b_1, b_2)_{-1} + (a_1, a_2)_{-1}$$

medføre, at

$$(b_1, b_2)_{-1} + (\xi_1, \xi_2)_{-1} = (a_1, a_2)_{-1}.$$

I dette Tilfælde bliver altsaa Rodparrene (ξ_1, ξ_2), (a_1, a_2) og (b_1, b_2) 2 og 2 harmonisk forbundne.

8. Vi vil nu undersøge, i hvilke Tilfælde Summen af 2 Numeraler er uafhængig af Ordenen, altsaa i hvilke Tilfælde Ligningen

$$A + B = B + A$$

vil være rigtig.

Er mindst ét af Numeralerne 0, er Betingelsen opfyldt.

Vi antager nu, at A og B er ordinære Numeraler; det vil da være tilstrækkeligt at behandle det specielle Tilfælde, hvor ét af Numeralerne f. Eks. A har Rødderne 0 og ∞.

A svarer da til Transformationen

$$x = a_1 x', \quad \text{hvor} \quad a_1 \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

medens B svarer til Transformationen

$$x = \frac{ax' + b}{cx' + d}, \quad \text{hvor} \quad ad - bc \neq 0.$$

Skal nu $A + B = B + A$, maa Ligningen

$$a_1 \cdot \frac{ax' + b}{cx' + d} = \frac{aa_1 x' + b}{ca_1 x' + d}$$

være identisk i x'. Da $a_1 \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, kan dette kun finde Sted i følgende 2 Tilfælde:

1) $a = 0, \; d = 0, \; a_1 = -1,$

og 2) $a \neq 0, \; b = 0, \; c = 0$ (her er altsaa $d \neq 0$, da $ad \neq bc$).

I første Tilfælde bliver Transformationerne

$$x = -x' \quad \text{og} \quad x = \frac{b}{cx'}.$$

De to Transformationer er altsaa involutoriske og Rodparrene $(0, \infty)$ og $\pm\sqrt{\frac{b}{c}}$ er harmonisk forbundne.

I andet Tilfælde faar man Transformationen:

$$x = a_1 x' \quad \text{og} \quad x = \frac{a}{d} x'.$$

Disse Transformationer har det samme Rodpar $(0, \infty)$.

Efter at have undersøgt det Tilfælde, hvor A og B er ordinære, gaar vi nu over til det Tilfælde, hvor f. Eks. A er singulært. Idet A's Dobbeltværdi sættes

$=\infty$, svarer A til Transformationen:

$$x = x' + b_1, \quad \text{hvor } b_1 \neq 0,$$

medens B svarer til Transformationen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ligningen

$$\frac{a(x'+b_1)+b}{c(x'+b_1)+d} = \frac{ax'+b}{cx'+d} + b_1$$

skal nu være identisk i x', altsaa

$$\begin{pmatrix} a & ab_1+b \\ c & cb_1+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+cb_1 & b+db_1 \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Her kan nu indtræffe 2 Tilfælde:

1) $c=0$; man faar da $\begin{pmatrix} a & ab_1+b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+db_1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, altsaa

$$ab_1+b = b+b_1 d, \quad \text{hvoraf, da } b_1 \neq 0, \; a=d.$$

Transformationen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ har altsaa Formen

$$x = x' + \frac{b}{d},$$

saa at dens Rødder falder sammen i ∞.

2) $c \neq 0$; i dette Tilfælde bliver $a = a + b_1 c$, altsaa $b_1 = 0$, hvilket Tilfælde var udelukket.

Vi har altsaa fundet følgende almindelige Resultat:

$A+B$ kan kun være $= B+A$ i følgende 4 Tilfælde:

1°. Mindst et af Numeralerne er 0.

2°. Numeralerne er begge ordinære og har de samme Rødder.

3°. Numeralerne er begge involutoriske og de 2 Rodpar er harmonisk forbundne. I dette Tilfælde bliver Summen $A+B$ selv et involutorisk Numeral, hvis Rodpar er harmonisk forbundet med ethvert af de givne Numeralers Rodpar.

4°. Numeralerne er begge singulære og har samme Rod.

At $A+B$ virkelig er $= B+A$ i ethvert af de nævnte Tilfælde, indses ogsaa let direkte.

9. Vi vil bestemme 3 ikke identiske Transformationer med givne Rodpar (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2) og (ζ_1, ζ_2) saaledes, at Summen bliver 0. Det forudsættes foreløbig, at ikke 2 af Størrelserne ξ, η og ζ er lige store. Man skal da have:

$$(\zeta_1, \zeta_2)_\nu + (\eta_1, \eta_2)_\mu + (\xi_1, \xi_2)_\lambda = 0.$$

Her kan man sætte

$$(\xi_1, \xi_2)_\lambda = (\beta_1, \beta_2)_{-1} + (\alpha_1, \alpha_2)_{-1},$$

hvor β_1 og β_2 er harmonisk forbundne med Parret (ξ_1, ξ_2) samt med Parret (η_1, η_2), medens man om Parret (α_1, α_2) foreløbig kun ved, at det skal være harmonisk forbundet med ξ_1 og ξ_2.

Ligeledes sættes

$$(\eta_1, \eta_2)_\mu = (\gamma_1, \gamma_2)_{-1} + (\beta_1, \beta_2)_{-1},$$

hvilket kan lade sig gøre, da β_1 og β_2 er harmonisk forbundne med η_1 og η_2; γ_1 og γ_2 bliver da ogsaa harmonisk forbundne med η_1 og η_2.

Man skal nu have

$$(\zeta_1, \zeta_2)_\nu + (\gamma_1, \gamma_2)_{-1} + (\beta_1, \beta_2)_{-1} + (\beta_1, \beta_2)_{-1} + (\alpha_1, \alpha_2)_{-1} = 0,$$

eller:

$$(\zeta_1, \zeta_2)_\nu + (\gamma_1, \gamma_2)_{-1} + (\alpha_1, \alpha_2)_{-1} = 0.$$

For at dette kan finde Sted maa (ζ_1, ζ_2) være harmonisk forbundet med begge Parrene (γ_1, γ_2) og (α_1, α_2).

Man har altsaa:

(α_1, α_2) harmonisk forbundet med (ξ_1, ξ_2) og (ζ_1, ζ_2),
(β_1, β_2) „ „ „ (ξ_1, ξ_2) og (η_1, η_2),
(γ_1, γ_2) „ „ „ (η_1, η_2) og (ζ_1, ζ_2).

Da ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, ζ_1 og ζ_2 er givne, bliver altsaa de 3 Par (α_1, α_2), (β_1, β_2) og (γ_1, γ_2) herved fuldstændig bestemte, og de søgte Transformationer er da ogsaa fundne, idet:

$$(\xi_1, \xi_2)_\lambda = (\beta_1, \beta_2)_{-1} + (\alpha_1, \alpha_2)_{-1},$$
$$(\eta_1, \eta_2)_\mu = (\gamma_1, \gamma_2)_{-1} + (\beta_1, \beta_2)_{-1},$$
$$(\zeta_1, \zeta_2)_\nu = (\alpha_1, \alpha_2)_{-1} + (\gamma_1, \gamma_2)_{-1}.$$

Det fremgaar tillige af denne Undersøgelse, at det er umuligt at bestemme 3 ikke identiske Transformationer $(\xi_1, \xi_2)_\lambda$, $(\eta_1, \eta_2)_\mu$ og $(\zeta_1, \zeta_2)_\nu$, hvis Sum er 0, og hvis Rodpar alle er harmonisk forbundne med ét og samme Værdipar. (Vi erindrer om, at vi har udelukket det Tilfælde, da de 3 Rodpar falder sammen til ét Par; i dette Tilfælde er Summen 0, naar blot $\lambda\mu\nu = 1$).

Er ét eller flere af Numeralerne singulære, gælder med ganske ringe rent formelle Ændringer de samme Betragtninger som i det almindelige Tilfælde.

Dersom ξ_2 og η_2 har samme Værdi, maa enten ζ_1 eller ζ_2 ogsaa have denne Værdi. Vi sætter $\xi_2 = \eta_2 = \zeta_2 = \infty$, og søger Betingelsen for, at

$$(\zeta_1, \zeta_2)_\nu + (\eta_1, \eta_2)_\mu + (\xi_1, \xi_2)_\lambda = 0.$$

De tre Transformationer fremstilles ved Ligningerne:

$$x = \lambda(x' - \xi_1) + \xi_1,$$
$$x = \mu(x' - \eta_1) + \eta_1,$$
$$x = \nu(x' - \zeta_1) + \zeta_1.$$

Skal disse hæve hinanden, maa Ligningen:

$$\lambda\mu\nu(x'-\xi_1)+\mu\nu(\xi_1-\eta_1)+\nu(\eta_1-\zeta_1)+\zeta_1 = x'$$

være identisk i x'. Altsaa har man:

$$\lambda\mu\nu = 1,$$

og

$$\mu\nu(\xi_1-\eta_1)+\nu(\eta_1-\zeta_1)+\zeta_1-\xi_1 = 0.$$

Man ser heraf, at én af Størrelserne λ, μ og ν kan vælges vilkaarlig, hvorefter de 2 andre i Almindelighed faar éntydig bestemte Værdier.

Er $\lambda = -1$, faar man til Bestemmelse af μ og ν

$$\mu\nu = -1,$$

og

$$\nu(\eta_1-\zeta_1) = 2\xi_1-(\eta_1+\zeta_1).$$

Idet ξ_1, η_1 og ζ_1 er 3 forskellige Værdier, kan man altsaa af disse Ligninger finde brugelige Værdier for μ og ν, naar blot ikke:

$$\xi_1 = \frac{\eta_1+\zeta_1}{2},$$

d. v. s. naar ξ_1 og ∞ er harmonisk forbundne med η_1 og ζ_1. Altsaa:

Naar ξ_1, η_1, ζ_1 og ξ_2 er 4 forskellige Værdier, og (ξ_1, ξ_2) ikke er harmonisk forbundet med η_1 og ζ_1, da kan man altid paa éntydig Maade bestemme μ og ν saaledes, at

$$(\zeta_1, \xi_2)_\nu + (\eta_1, \xi_2)_\mu + (\xi_1, \xi_2)_{-1} = 0.$$

Om Muligheden af en Multiplikation.

10. Vi vil nu undersøge, om der kan indrettes en Multiplikationsregel for vore Numeraler. Man skal altsaa ud fra 2 vilkaarlige givne Numeraler M og A, som vi kalder Multiplikator og Multiplikand, paa éntydig Maade kunne bestemme et 3dje Numeral P, som kan kaldes Produktet af M og A. Dette udtrykkes ved Ligningen:

$$M \cdot A = P.$$

Vi stiller endvidere den Betingelse, at Multiplikationen skal være forbunden med den i Forvejen definerede Addition gennem det første distributive Princip, som udtrykkes ved Ligningen:

$$M \cdot (A+B) = M \cdot A + M \cdot B,$$ [1]

idet denne Ligning skal gælde for alle Numeralværdier M, A og B.

[1] Vi finder det naturligst af rent formelle Hensyn at vælge dette Princip i Stedet for det andet distributive Princip, som udtrykkes ved Ligningen $(M+N) \cdot A = M \cdot A + N \cdot A$. De Resultater, som man vilde komme til ved at gaa ud fra dette andet Princip, kan umiddelbart dannes af dem, som vi kommer til i det følgende, ved en simpel Ombytning af Ordene „Multiplikator“ og „Multiplikand“.

Sættes $B = 0$, faar man:

$$M \cdot A = M \cdot A + M \cdot 0,$$

altsaa

$$M \cdot 0 = 0;$$

naar Multiplikanden er 0, er Produktet altsaa ogsaa 0.

11. Idet A er et vilkaarligt involutorisk Numeral, har man:

$$A + A = 0;$$

heraf følger, at:

$$M \cdot A + M \cdot A = M \cdot 0 = 0.$$

Altsaa:

Naar i et Produkt Multiplikanden er involutorisk, da maa Produktet selv være involutorisk eller 0.

Heraf følger, at der bliver uendelig mange Tilfælde, i hvilke Ligningen

$$M \cdot A = B$$

ikke vil kunne løses med Hensyn til M; naar nemlig A er involutorisk, og B ikke er 0 og ikke involutorisk, kan M ikke bestemmes. Dette kan udtrykkes saaledes:

Division af første Art er i Almindelighed umulig, naar Divisor er et involutorisk Numeral. (Her — som i det følgende — betegner Division af første Art den Division, hvor det gælder om at bestemme Multiplikator, naar Produktet og Multiplikanden er givne).

12. Vi har vist, at dersom $A = (\xi_1, \xi_2)_{-1}$ er et involutorisk Numeral, da vil $M \cdot A$ enten være 0 eller et involutorisk Numeral.

Vi vil nu nærmere undersøge det Tilfælde, da $M \cdot A = 0$.

Idet η_1 og η_2 er harmonisk forbundne med ξ_1 og ξ_2, kan Numeralet $(\eta_1, \eta_2)_{\sqrt{\lambda}}$, hvor λ er vilkaarlig, opløses i en Sum af $(\xi_1, \xi_2)_{-1}$ og $(\xi'_1, \xi'_2)_{-1}$, hvor ξ'_1 og ξ'_2 er harmonisk forbundne med η_1 og η_2 (7). Af Ligningen:

$$(\eta_1, \eta_2)_{\sqrt{\lambda}} = (\xi'_1, \xi'_2)_{-1} + (\xi_1, \xi_2)_{-1}$$

følger nu, at:

$$M \cdot (\eta_1, \eta_2)_{\sqrt{\lambda}} = M \cdot (\xi'_1, \xi'_2)_{-1} + M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{-1},$$

og da vi har forudsat, at det sidste Led paa højre Side er 0:

$$M \cdot (\eta_1, \eta_2)_{\sqrt{\lambda}} = M \cdot (\xi'_1, \xi'_2)_{-1}.$$

Heraf faar man:

$$M \cdot (\eta_1, \eta_2)_{\lambda} = M \cdot \left((\eta_1, \eta_2)_{\sqrt{\lambda}} + (\eta_1, \eta_2)_{\sqrt{\lambda}}\right) = M \cdot \left((\xi'_1, \xi'_2)_{-1} + (\xi'_1, \xi'_2)_{-1}\right),$$

altsaa

$$M \cdot (\eta_1, \eta_2)_{\lambda} = 0.$$

Resultatet er altsaa, at $M \cdot N = 0$, naar blot N er et Numeral, hvis Rødder η_1 og η_2 er harmonisk forbundne med ξ_1 og ξ_2.

Dersom N er et singulært Numeral med Dobbeltrod ξ_1 eller ξ_2, faar man ogsaa $M \cdot N = 0$; Betragtningen er i det væsentlige den samme som i det almindelige Tilfælde.

Betragtes nu et vilkaarligt Numeral Q, hvis Rødder ζ_1 og ζ_2 ikke er harmonisk forbundne med ξ_1 og ξ_2, da kan man sætte:

$$Q = (b_1, b_2)_{-1} + (a_1, a_2)_{-1},$$

idet baade (a_1, a_2) og (b_1, b_2) er harmonisk forbundne med ζ_1 og ζ_2; tillige kan det forudsættes, at ingen af Størrelserne a_1, a_2, b_1 og b_2 falder sammen med ξ_1 eller ξ_2.

Lad nu α_1 og α_2 være harmonisk forbundne, baade med (a_1, a_2) og med (ξ_1, ξ_2), medens β_1 og β_2 er harmonisk forbundne med begge Parrene (b_1, b_2) og (ξ_1, ξ_2). Man kan da sætte:

$$(\xi_1, \xi_2)_{-1} + (a_1, a_2)_{-1} = (\alpha_1, \alpha_2)_\lambda,$$

og

$$(b_1, b_2)_{-1} + (\xi_1, \xi_2)_{-1} = (\beta_1, \beta_2)_\mu.$$

Heraf faar man ved Addition:

$$(b_1, b_2)_{-1} + (a_1, a_2)_{-1} = (\beta_1, \beta_2)_\mu + (\alpha_1, \alpha_2)_\lambda,$$

altsaa

$$Q = (\beta_1, \beta_2)_\mu + (\alpha_1, \alpha_2)_\lambda,$$

hvoraf atter

$$M \cdot Q = M \cdot (\beta_1, \beta_2)_\mu + M \cdot (\alpha_1, \alpha_2)_\lambda;$$

men som vi ovenfor har vist, maa begge Produkterne $M \cdot (\beta_1, \beta_2)_\mu$ og $M \cdot (\alpha_1, \alpha_2)_\lambda$ være 0, idet (β_1, β_2) og (α_1, α_2) er harmonisk forbundne med (ξ_1, ξ_2); altsaa er:

$$M \cdot Q = 0.$$

Dersom der altsaa eksisterer et involutorisk Numeral A, for hvilket $M \cdot A = 0$, da vil ethvert Produkt, i hvilket M er Multiplikator, være 0.

En saadan Multiplikator kalder vi en Nulmultiplikator.

Der kan altsaa indtræffe 2 Muligheder:

1) Alle Multiplikatorer er Nulmultiplikatorer. Ethvert Produkt bliver da 0.

2) Der findes mindst én Multiplikator M, der ikke er Nulmultiplikator. For en saadan Multiplikator vil det gælde, at $M \cdot A$ sikkert er involutorisk, naar A er involutorisk.

I det følgende forudsættes det nu, at den Multiplikator M, vi betragter, ikke er Nulmultiplikator.

13. Dersom 2 involutoriske Numeraler $\xi_1, \xi_2)_{-1}$ og $(\eta_1, \eta_2)_{-1}$ har harmonisk forbundne Rodpar, (ξ_1, ξ_2) og (η_1, η_2), da vil disse Numeraler ved Multiplikation med samme Multiplikator M give 2 involutoriske Numeraler $(\xi_1', \xi_2')_{-1}$ og $(\eta_1', \eta_2')_{-1}$, hvis Rodpar ogsaa er harmonisk forbundne.

Idet ζ_1 og ζ_2 er harmonisk forbundne med begge Parrene (ξ_1, ξ_2) og (η_1, η_2), har man nemlig (7):

$$(\xi_1, \xi_2)_{-1} + (\eta_1, \eta_2)_{-1} + (\zeta_1, \zeta_2)_{-1} = 0,$$

hvoraf ved Multiplikation med M:

$$(\xi_1', \xi_2')_{-1} + (\eta_1', \eta_2')_{-1} + M \cdot (\zeta_1, \zeta_2)_{-1} = 0.$$

Men naar 3 involutoriske Numeraler har Summen 0, da maa Rodparrene 2 og 2 være harmonisk forbundne (7). Hermed er Sætningen bevist.

14. Vi betragter nu alle de Multiplikander, som har samme bestemte Rodpar (ξ_1, ξ_2), hvor $\xi_1 \neq \xi_2$, og benytter stadig den samme Multiplikator M.

Man kan da sætte:

$$M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{-1} = (\xi_1', \xi_2')_{-1};$$

dernæst indser man, at

$$M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{\sqrt{-1}}$$

hverken kan være involutorisk eller 0; thi i begge Tilfælde vilde

$$M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{\sqrt{-1}} + M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{\sqrt{-1}} = M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{-1}$$

være 0.

Betragtes nu et nyt vilkaarligt Numeral $(\xi_1, \xi_2)_\lambda$ med Rødderne ξ_1 og ξ_2 og vilkaarlig Indeks λ, da kan det bevises, at $M \cdot (\xi_1, \xi_2)_\lambda$ enten bliver et Numeral med Rødderne ξ_1' og ξ_2', eller ogsaa bliver det 0.

Da man nemlig for det første har:

$$(\xi_1, \xi_2)_{\sqrt{-1}} + (\xi_1, \xi_2)_{-1} = (\xi_1, \xi_2)_{-1} + (\xi_1, \xi_2)_{\sqrt{-1}},$$

har man ogsaa:

$$M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{\sqrt{-1}} + M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{-1} = M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{-1} + M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{\sqrt{-1}}.$$

De to Numeraler $M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{\sqrt{-1}}$ og $M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{-1}$ har altsaa kommutativ Addition, og da intet af dem er 0, og de ikke begge er involutoriske, maa de have de samme Rødder (8); altsaa har $M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{\sqrt{-1}}$ Rødderne ξ_1' og ξ_2'.

Dernæst har man paa lignende Maade, da $(\xi_1, \xi_2)_{\sqrt{-1}}$ og $(\xi_1, \xi_2)_\lambda$ har kommutativ Addition, at Numeralerne $M \cdot (\xi_1, \xi_2)_{\sqrt{-1}}$ og $M \cdot (\xi_1, \xi_2)_\lambda$ ogsaa har kommutativ Addition, og da det første hverken er 0 eller involutorisk, maa det sidste enten være 0 eller have de samme Rødder ξ_1' og ξ_2' som det første. (8).

Altsaa:

M u l t i p l i c e r e s alle de Numeraler, hvis Rødder er 2 bestemte forskellige Tal ξ_1 og ξ_2, med den samme Multiplikator M, vil de fremkomne Produkter enten alle være ordinære Numeraler med de samme Rødder ξ_1' og ξ_2', eller ogsaa vil nogle af dem være 0, medens de øvrige er ordinære og har de samme Rødder ξ_1' og ξ_2'.

15. Dersom $(\alpha, \beta)_{-1}$ har en konstant Rod α, medens β er variabel, da vil Produktet $M \cdot (\alpha, \beta)_{-1}$ ogsaa have en konstant Rod; med andre Ord: Produkterne $M \cdot (\alpha, \beta)_{-1}$ og $M \cdot (\alpha, \gamma)_{-1}$ maa have en fælles Rod.

Havde man nemlig

$$M\cdot(\alpha,\beta)_{-1} = (\xi_1,\xi_2)_{-1},$$

og

$$M\cdot(\alpha,\gamma)_{-1} = (\eta_1,\eta_2)_{-1},$$

hvor ξ_1, ξ_2, η_1 og η_2 var 4 forskellige Værdier, da kunde man bestemme u og v saaledes, at de var harmonisk forbundne baade med (ξ_1,ξ_2) og med (η_1,η_2), og man kunde da sætte:

$$(\eta_1,\eta_2)_{-1} + (\xi_1,\xi_2)_{-1} = (u,v)_\lambda,$$

altsaa

$$M\cdot\big((\alpha,\gamma)_{-1} + (\alpha,\beta)_{-1}\big) = (u,v)_\lambda.$$

Men $(\alpha,\gamma)_{-1} + (\alpha,\beta)_{-1} = N$ er et Numeral med sammenfaldende Rødder α. Vælger man en vilkaarlig Værdi $\delta \neq \alpha$, kunde man i Følge 6 altid bestemme en saadan Værdi ε, at

$$N = (\alpha,\varepsilon)_{-1} + (\alpha,\delta)_{-1};$$

heraf vilde nu følge, at

$$M\cdot(\alpha,\varepsilon)_{-1} + M\cdot(\alpha,\delta)_{-1} = (u,v)_\lambda,$$

altsaa maatte $M\cdot(\alpha,\delta)_{-1}$ (saa vel som $M\cdot(\alpha,\varepsilon)_{-1}$) have sine Rødder harmonisk forbundne med u og v. Altsaa:

Hvorledes man end valgte $\delta\,(\neq\alpha)$, maatte $M\cdot(\alpha,\delta)_{-1}$ altsaa have sine Rødder harmonisk forbundne med u og v.

Vi vil derefter vise, at man paa uendelig mange Maader kunde give δ en saadan Værdi, at $M\cdot(\alpha,\delta)_{-1}$ fik et Rodpar forskelligt fra (ξ_1,ξ_2) og fra (η_1,η_2); i modsat Fald vilde nemlig ethvert Numeral $M\cdot(\alpha,\delta)_{-1}$ (maaske med et endeligt Antal Undtagelser) enten være $= (\xi_1,\xi_2)_{-1}$ eller $= (\eta_1,\eta_2)_{-1}$, og da nu ethvert Numeral P med Dobbeltroden α kan opløses i en Sum af Formen:

$$P = (\alpha,\varepsilon_1)_{-1} + (\alpha,\delta_1)_{-1},$$

hvor man altid kan sørge for, at δ_1 og ε_1 ikke antager visse specielle Værdier i endeligt Antal, vilde Følgen blive den, at

$$M\cdot P = M\cdot(\alpha,\varepsilon_1)_{-1} + M\cdot(\alpha,\delta_1)_{-1}$$

kun kunde antage følgende Værdier:

$$1)\quad (\xi_1,\xi_2)_{-1} + (\xi_1,\xi_2)_{-1}\ \big(\text{eller } (\eta_1,\eta_2)_{-1} + (\eta_1,\eta_2)_{-1}\big) = 0,$$
$$2)\quad (\eta_1,\eta_2)_{-1} + (\xi_1,\xi_2)_{-1} = (u,v)_\lambda,$$
$$3)\quad (\xi_1,\xi_2)_{-1} + (\eta_1,\eta_2)_{-1} = (u,v)_{\frac{1}{\lambda}}.$$

For ethvert singulært Numeral P med Dobbeltroden α vilde det altsaa gælde, at $M\cdot P$ kun kunde antage én af Værdierne 0, $(u,v)_\lambda$ og $(u,v)_{\frac{1}{\lambda}}$.

Satte man her specielt $P = N + N$, hvor N betegner Numeralet ovenfor $(N = (\alpha,\gamma)_{-1} + (\alpha,\beta)_{-1})$, vilde man faa

$$M \cdot P = M \cdot N + M \cdot N = (u, v)_{\lambda^2} = \begin{cases} 0 \\ (u, v)_\lambda \\ (u, v)_{\frac{1}{\lambda}} \end{cases};$$

men heraf vilde følge, da $\lambda \neq 1$:

$$\lambda = \begin{cases} -1 \\ 1^{\frac{1}{3}} \end{cases}.$$

Valgte man nu et nyt Numeral Q med Dobbeltrod α, saaledes bestemt, at

$$Q + Q + \ldots (6 \text{ Gange}) = N,$$

da maatte

$$M \cdot Q = \begin{cases} 0 \\ (u, v)_\lambda \\ (u, v)_{\frac{1}{\lambda}} \end{cases}$$

medføre, at

$$M \cdot N = \begin{cases} 0 \\ (u, v)_{\lambda^6} \\ (u, v)_{\frac{1}{\lambda^6}} \end{cases};$$

det vil sige, at $M \cdot N$ maatte være 0, men dette strider imod Forudsætningen.

Vi har altsaa bevist følgende:

Dersom $M \cdot (\alpha, \beta)_{-1}$ og $M \cdot (\alpha, \gamma)_{-1}$ havde Rodparrene (ξ_1, ξ_2) og (η_1, η_2), hvor ξ_1, ξ_2, η_1 og η_2 er 4 forskellige Værdier, da kunde man altid paa uendelig mange Maader bestemme δ saaledes, at $M \cdot (\alpha, \delta)_{-1}$ fik et Rodpar (ζ_1, ζ_2) forskelligt fra baade (ξ_1, ξ_2) og (η_1, η_2). De tre Par (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2) og (ζ_1, ζ_2) var da harmonisk forbundne med ét og samme 4de Par (u, v).

Derefter kunde man nu opløse et af de saaledes bestemte Numeraler $(\alpha, \delta)_{-1}$ i en Sum af 2 Numeraler, hvoraf det ene havde Rodparret (α, β), medens det andet havde Rodparret (α, γ); dette kan i Følge 9 lade sig gøre, naar blot ikke α og δ er harmonisk forbundne med β og γ, men da vi kunde vælge δ paa flere Maader, kan man altsaa sikkert vælge δ saaledes, at en saadan Opløsning kan foretages. Men af Ligningen

$$(\alpha, \delta)_{-1} = (\alpha, \gamma)_{\mu_2} + (\alpha, \beta)_{\mu_1}$$

vilde nu følge, at

$$M \cdot (\alpha, \delta)_{-1} = M \cdot (\alpha, \gamma)_{\mu_2} + M \cdot (\alpha, \beta)_{\mu_1}.$$

Numeralet paa venstre Side var $= (\zeta_1, \zeta_2)_{-1}$, og de to Numeraler paa højre Side har Rodparrene henholdsvis (η_1, η_2) og (ξ_1, ξ_2) eller ogsaa er ét af dem 0. I første Tilfælde vilde Ligningen være umulig, da Parrene (ζ_1, ζ_2), (η_1, η_2) og (ξ_1, ξ_2) er harmonisk forbundne med ét og samme 4de Par (u, v), og i andet Tilfælde skulde et Numeral med Rodparret (ζ_1, ζ_2) være lig et Numeral, hvis Rodpar var enten (η_1, η_2) eller (ξ_1, ξ_2), men dette er ogsaa umuligt. Hermed er Beviset for Sætningen omsider fuldført.

16. Vi vil nu bevise, at $M \cdot (\alpha, \beta)_{-1}$ og $M \cdot (\alpha, \gamma)_{-1}$, hvor $\beta \neq \gamma$, ikke kan være lig ét og samme Numeral $(\xi_1, \xi_2)_{-1}$. Heraf vilde nemlig følge, at et vilkaarligt nyt Numeral af Formen $(\alpha, \delta)_{-1}$ ved Multiplikation med M ogsaa maatte give $(\xi_1, \xi_2)_{-1}$; thi man kunde sætte:

$$(\alpha, \delta)_{-1} = (\alpha, \gamma)_\mu + (\alpha, \beta)_\lambda,$$

altsaa

$$M \cdot (\alpha, \delta)_{-1} = M \cdot (\alpha, \gamma)_\mu + M \cdot (\alpha, \beta)_\lambda;$$

de to Led paa højre Side maatte nu enten være Numeraler, der begge havde Rodparret (ξ_1, ξ_2), eller ogsaa er ét af dem 0 (14). Men i begge Tilfælde vilde man faa

$$M \cdot (\alpha, \delta)_{-1} = (\xi_1, \xi_2)_{-1}.$$

Det Bevis, vi her har givet, gælder dog i Følge 9 ikke i det specielle Tilfælde, hvor δ og α er harmonisk forbundne med β og γ. Men i dette Tilfælde kunde man altid bestemme ε $(\neq \delta)$ saaledes, at

$$(\alpha, \delta)_{-1} = (\alpha, \gamma)_{-1} + (\alpha, \beta)_{-1} + (\alpha, \varepsilon)_{-1},$$

og man fik da heraf

$$M \cdot (\alpha, \delta)_{-1} = (\xi_1, \xi_2)_{-1} + (\xi_1, \xi_2)_{-1} + (\xi_1, \xi_2)_{-1} = (\xi_1, \xi_2)_{-1}.$$

Dersom altsaa $M \cdot (\alpha, \beta)_{-1}$ og $M \cdot (\alpha, \gamma)_{-1}$, hvor $\beta \neq \gamma$, var lig ét og samme Numeral $(\xi_1, \xi_2)_{-1}$, vilde man for alle Værdier af δ $(\neq \alpha)$ have:

$$M \cdot (\alpha, \delta)_{-1} = (\xi_1, \xi_2)_{-1}.$$

Betragtes nu et nyt Numeral $(\eta_1, \eta_2)_{-1}$, hvor η_1 og η_2 er forskellige fra α, kunde man bestemme δ_1 saaledes, at α og δ_1 var harmonisk forbundne med η_1 og η_2.

Sættes nu

$$M \cdot (\eta_1, \eta_2)_{-1} = (\eta_1', \eta_2')_{-1},$$

og benytter man, at

$$M \cdot (\alpha, \delta_1)_{-1} = (\xi_1, \xi_2)_{-1},$$

da har man, at η_1' og η_2' er harmonisk forbundne med ξ_1 og ξ_2, fordi Parrene (η_1, η_2) og (α, δ_1) er harmonisk forbundne. (13).

Altsaa vilde et hvilket som helst involutorisk Numeral, i hvilket α ikke er Rod, ved Multiplikation med M give et involutorisk Numeral, hvis Rodpar var harmonisk forbundet med ξ_1 og ξ_2.

Valgte man nu 3 involutoriske Numeraler, hvis Rodpar 2 og 2 var harmonisk forbundne (og hvoraf intet har en Rod $= \alpha$), da vilde disse ved Multiplikation med M frembringe 3 involutoriske Numeraler, hvis Rodpar 2 og 2 var harmonisk forbundne, og som alle var harmonisk forbundne med ξ_1 og ξ_2; men dette er umuligt.

Vi har altsaa nu bevist, at $M \cdot (\alpha, \beta)_{-1}$ og $M \cdot (\alpha, \gamma)_{-1}$ ikke kan være lig ét og samme Numeral $(\xi_1, \xi_2)_{-1}$, naar $\beta \neq \gamma$.

17. Da altsaa $M \cdot \left((\alpha, \beta)_{-1} + (\alpha, \gamma)_{-1}\right)$ ikke kan blive 0, naar $\beta \neq \gamma$, og da $M \cdot (\alpha, \beta)_{-1}$ og $M \cdot (\alpha, \gamma)_{-1}$ nødvendigvis har en Rod fælles (15), har man følgende Sætning:

Naar et singulært Numeral multipliceres med M, faar man altid et singulært Numeral.

18. Et ordinært Numeral kan aldrig ved Multiplikation med M give et singulært Numeral.

Dette følger umiddelbart af 14.

19. To involutoriske Numeraler, som ikke har nogen Rod fælles, kan altsaa ikke ved Multiplikation med M give 2 Numeraler, der har én enkelt Rod fælles; vi vil nu bevise, at de heller ikke kan give 2 identiske, eller, hvad der er det samme, at et ordinært Numeral ved Multiplikation med M aldrig kan give 0.

Det skal altsaa bevises, at $M \cdot (\alpha_1, \alpha_2)_{-1}$ og $M \cdot (\beta_1, \beta_2)_{-1}$ ikke begge kan være $= (\xi_1, \xi_2)_{-1}$, naar α_1, α_2, β_1 og β_2 er 4 forskellige Tal. I det Tilfælde, da α_1 og α_2 er harmonisk forbundne med β_1 og β_2, følger Sætningen af 13. Er (α_1, α_2) ikke harmonisk forbundne med (β_1, β_2), kan α_2' bestemmes saaledes, at α_1 og α_2' er harmonisk forbundne med β_1 og β_2. Da nu i Følge 13 $M \cdot (\alpha_1, \alpha_2')_{-1}$ og $M \cdot (\beta_1, \beta_2)_{-1}$ har harmonisk forbundne Rodpar, og da $M \cdot (\alpha_1, \alpha_2')_{-1}$ og $M \cdot (\alpha_1, \alpha_2)_{-1}$ har en Rod fælles (15), kan $M \cdot (\alpha_1, \alpha_2)_{-1}$ og $M \cdot (\beta_1, \beta_2)_{-1}$ altsaa ikke have de samme Rødder.

20. I det foregaaende har vi altsaa fundet følgende Resultater angaaende Multiplikation med et Numeral M, som ikke er Nulmultiplikator:

1) $M \cdot N$ kan kun blive 0, naar $N = 0$. (17 og 19).

2) Naar N har konstante forskellige Rødder, vil $M \cdot N$ ogsaa have konstante forskellige Rødder. (14 og 19).

3) Er N et singulært Numeral, vil $M \cdot N$ ogsaa være singulært (17).

4) Naar N har en konstant Rod, vil $M \cdot N$ ogsaa have en konstant Rod (15), og omvendt.

Idet vi stadig beholder den samme Multiplikator M, findes der altsaa en ved denne Multiplikator bestemt éntydig Transformation Σ_M, som fører fra de forskellige Multiplikanders Rødder $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)$ til de tilsvarende Produkters Rødder $(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots)$.

Om denne Transformation véd vi (13), at dersom Dobbeltforholdet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = -1$, da vil ogsaa $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ være $= -1$.

Da man nu ved at gaa ud fra 3 forskellige Tal α, β, γ kan danne en Gruppe af Tal, som indeholder α, β og γ, og som har den Egenskab, at naar 3 bestemte Tal findes i Gruppen, da vil ethvert med disse 3 Tal harmonisk forbundet 4de Tal ogsaa findes i Gruppen, og da der i en saadan Gruppe altid findes et Tal δ saaledes, at α, β, γ og δ faar et hvilket som helst opgivet reelt rationalt Dobbeltforhold, ses det, at den nævnte Transformation Σ_M har den Egenskab, at naar $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \lambda$ er reelt nationalt, da vil $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ ogsaa være $= \lambda$.

Endvidere ser man, at dersom

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta),$$

da er ogsaa $$(\alpha', \beta', \gamma', \delta') = (\varepsilon', \zeta', \eta', \vartheta'),$$

idet den lineære Transformation, der fører $(\alpha\beta\gamma\delta)$ over i $(\varepsilon\zeta\eta\vartheta)$, kan opløses i 2 involutoriske Transformationer.

I Følge de bekendte Regneregler for Dobbeltforhold kan man nu slutte, at dersom $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tilfredsstiller en hvilken som helst algebraisk Ligning med hele Koefficienter, da vil $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ være Rod i den samme algebraiske Ligning.

21. Vi betragter nu et vilkaarligt ordinært Numeral $(\alpha, \beta)_\lambda$ og antager, at

$$M \cdot (\alpha, \beta)_\lambda = (\alpha', \beta')_{\lambda'};$$

sætter man nu:

$$(\alpha, \beta)_\lambda = (\varepsilon, \zeta)_{-1} + (\gamma, \delta)_{-1},$$

hvor (γ, δ) og (ε, ζ) altsaa er harmonisk forbundne med α og β, har man: [1]

$$\lambda = (\gamma, \varepsilon, \alpha, \beta)^2. \tag{1}$$

Sætter man $M \cdot (\gamma, \delta)_{-1} = (\gamma', \delta')_{-1}$ og $M \cdot (\varepsilon, \zeta)_{-1} = (\varepsilon', \zeta')_{-1}$, bliver

$$(\alpha', \beta')_{\lambda'} = (\varepsilon', \zeta')_{-1} + (\gamma', \delta')_{-1},$$

altsaa

$$\lambda' = (\gamma', \varepsilon', \alpha', \beta')^2. \tag{2}$$

Er nu λ Rod i den algebraiske Ligning $f(x) = 0$, hvor Koefficienterne antages at være hele, da er $(\gamma, \varepsilon, \alpha, \beta)$, i Følge Lign. (1) ovenfor, Rod i Ligningen $f(x^2) = 0$, og i Følge 20 maa $(\gamma', \varepsilon', \alpha', \beta')$ være Rod i den samme Ligning. Men efter Lign. (2) har man da, at λ' er Rod i Ligningen $f(x) = 0$. Altsaa:

Naar Multiplikandens Indeks er Rod i en vilkaarlig algebraisk Ligning med hele Koefficienter, da vil Produktets Indeks være Rod i den samme Ligning.

I det Tilfælde, da den omtalte Ligning er af første Grad, har man:

Naar Multiplikandens Indeks har en rational Værdi, da vil Produktets Indeks have den samme Værdi.

Tidligere har vi bevist, at naar Multiplikanden er singulær, er Produktet ogsaa singulært. (17).

Af disse Sætninger følger nu, at Division af første Art i Almindelighed er umulig, naar Divisor er et ordinært Numeral, hvis Indeks er et hvilket som helst reelt eller imaginært algebraisk Tal, samt naar Divisor er et singulært Numeral.

22. Vi har hidtil ikke gjort nogen Forudsætning om Produktets Kontinuitet; men stiller vi nu den Fordring, at Produktet skal variere kontinuert

[1] Ved $(\gamma, \varepsilon, \alpha, \beta)$ forstaar vi Udtrykket $\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} : \frac{\varepsilon - \alpha}{\varepsilon - \beta}$; Lign. (1) findes ganske elementært ved at sætte $\beta = \infty$.

med Multiplikanden, naar Multiplikator er konstant, da vil vi af de nylig fundne Resultater straks kunne slutte, at den Σ-Transformation, der for en bestemt Multiplikator fører fra Multiplikandens Rødder til Produktets Rødder, maa være en lineær Transformation eller en omlagt lineær (symmetral) Transformation[1]. I første Tilfælde er Produktets Indeks og Multiplikandens Indeks lige store, og i andet Tilfælde er de konjugert imaginære.

Division af første Art er altsaa i Almindelighed umulig.

De Multiplikationsregler, der nu kan opstilles, er følgende:

1) Alle Produkter $= 0$.

Her gælder begge de distributive Principper, det kommutative Princip og det associative Princip. Men Division kan der ikke blive Tale om.

2) Der gives ingen, én eller flere Nulmultiplikatorer; man kan vælge disse ganske vilkaarligt. For enhver af de øvrige Multiplikatorer M angiver man en éntydig bestemt lineær (eller symmetral) Transformation Σ_M saaledes, at $M \cdot (\xi_1, \xi_2)_\lambda$ bestemmes ved, at man anvender denne Transformation paa ξ_1 og ξ_2 og beholder Indeks λ (eller ombytter den med den konjugert imaginære Værdi).

Hvorledes vi vælger disse lineære (eller symmetrale) Transformationer, og hvorledes vi lader dem svare til Multiplikatorerne, er ligegyldigt; det første distributive Princip vil altid gælde. Det andet distributive Princip gælder i Almindelighed ikke; dette vilde jo nemlig medføre, at et Produkt, der ikke var Nul, maatte have samme Indeks som Multiplikator, i hvert Fald naar denne Indeks var reel, rational, hvad der i Almindelighed vilde være i Strid med de foregaaende Resultater. Ligeledes ses det, at det kommutative Princip i Almindelighed heller ikke gælder, og som vi har sét, er Division af første Art i Almindelighed umulig.

Derimod er Division af 2. Art, d. v. s. Opløsning af Ligningen $M \cdot A = B$ med Hensyn til A, altid mulig og éntydig, naar blot M ikke er en Nulmultiplikator.

Det staar nu kun tilbage at undersøge det associative Princip. Med Hensyn til dette vil vi foreløbig kun nævne det specielle Tilfælde, hvor Multiplikationsreglen er den, at ethvert Produkt er lig Multiplikanden. I dette Tilfælde er Princippet tilfredsstillet.

23. Idet vi stadig fastholder det første distributive Princip og Fordringen om Produktets kontinuerte Afhængighed af Multiplikanden, vil vi nu undersøge, om det associative Princip kan tilfredsstilles, naar der skal eksistere mindst én Multiplikator M, der hverken gør $M \cdot A = 0$ eller $M \cdot A = A$ for alle Numeralværdier af A.

[1] Se C. Juel: Bidrag til den imaginære Linies og den imaginære Plans Geometri (Kjøbenhavn 1885) S. 13.

Det kan da for det første vises, at 0 nødvendigvis maa være en Nulmultiplikator, altsaa at $0 \cdot A = 0$ for alle A. I modsat Fald maatte der nemlig til 0 svare en bestemt lineær (eller symmetral) Transformation Σ_0, og da det nu forlanges, at

$$M \cdot (0 \cdot A) = (M \cdot 0) \cdot A,$$

altsaa at

$$M \cdot (0 \cdot A) = 0 \cdot A,$$

ses det, at Σ_0 og den til M svarende Transformation Σ_M ved Sammensætning skulde give Σ_0; men dette er umuligt, da Σ_M ikke er Identiteten.

Man maa altsaa have

$$0 \cdot A = 0.$$

Men dernæst kan det bevises, at der maa eksistere uendelig mange andre Nulmultiplikatorer.

Vi deler Undersøgelsen i 4 Tilfælde:

1) Lad Σ_M være en lineær Transformation med 2 forskellige Dobbeltværdier α og β. Ethvert Numeral af Formen $(\alpha, \beta)_\lambda$ maa da være en Nulmultiplikator. Thi:

$$M \cdot (\alpha, \beta)_\lambda = (\alpha, \beta)_\lambda,$$

og da den associative Lov skal gælde, har man altsaa, idet N er et vilkaarligt Numeral:

$$M \cdot \big((\alpha, \beta)_\lambda \cdot N\big) = (\alpha, \beta)_\lambda \cdot N.$$

Dersom nu $(\alpha, \beta)_\lambda$ ikke var en Nulmultiplikator, maatte den bestemme en vis Σ-Transformation, der skulde blive uforandret ved Sammensætning med Σ_M; men dette er umuligt.

2) Er Σ_M en lineær Transformation med sammenfaldende Dobbeltværdier α, da vil ethvert singulært Numeral A med Dobbeltroden α være en Nulmultiplikator. Thi man kan sætte

$$A = (\alpha, \gamma)_{-1} + (\alpha, \beta)_{-1},$$

hvoraf ved Multiplikation med M:

$$M \cdot A = (\alpha, \gamma')_{-1} + (\alpha, \beta')_{-1},$$

idet β' og γ' er dannede af β og γ ved Anvendelse af Transformationen Σ_M; men man har:

$$(\alpha, \gamma')_{-1} + (\alpha, \beta')_{-1} = (\alpha, \gamma)_{-1} + (\alpha, \beta)_{-1},$$

hvilket lettest indsés ved, at man vælger $\alpha = \infty$, hvorved Σ_M bliver en Parallelforskydning.

Altsaa har man:

$$M \cdot A = A,$$

hvorefter det ligesom ovenfor let vises, at A er Nulmultiplikator.

3) Er Σ_M en symmetral Transformation, som ikke er involutorisk, da vil Transformationen $\Sigma_{M.M}$ blive lineær, og der maa da efter de Resultater, vi har fundet i de 2 første Tilfælde, blive uendelig mange til denne Transformation svarende Nulmultiplikatorer.

4) Dersom Σ_M er en symmetral og involutorisk Transformation, der fører α over i α_1 ($\neq \alpha$), da vil ethvert Numeral af Formen $(\alpha, \alpha_1)_\lambda$, hvor λ har Modulus 1, være uforanderligt ved Multiplikation med M, altsaa

$$M \cdot (\alpha, \alpha_1)_\lambda = (\alpha, \alpha_1)_\lambda,$$

hvorefter man som før kan vise, at $(\alpha, \alpha_1)_\lambda$ er en Nulmultiplikator.

For hver egentlig Multiplikator M findes der altsaa uendelig mange tilsvarende Nulmultiplikatorer.

Selv om det efter de indvundne Resultater kun har ringe Interesse at gaa videre i Undersøgelsen, vil vi dog endnu ved et simpelt Eksempel paavise, at der virkelig eksisterer Multiplikationsregler af den her omhandlede Art, idet vi lader Σ-Transformationernes Gruppe være Gruppen af alle Ligedannethedstransformationer. De Multiplikatorer, som har disse Σ-Transformationer, kan f. Eks. være alle involutoriske Numeraler, der ikke har nogen Rod $= \infty$.

Til Multiplikatoren $(\alpha_1, \alpha_2)_{-1}$ lader vi svare Σ-Transformationen

$$x = (\alpha_2 - \alpha_1) x' + \alpha_1,$$

saa at Multiplikationsreglen bliver denne:

$$(\alpha_1, \alpha_2)_{-1} \cdot (\beta_1, \beta_2)_\lambda = \big((\alpha_2 - \alpha_1)\beta_1 + \alpha_1, \ (\alpha_2 - \alpha_1)\beta_2 + \alpha_1\big)_\lambda,$$

medens

$$M \cdot N = 0,$$

naar M ikke er involutorisk, eller naar én af Rødderne er ∞, samt naar M er singulær. Man ser let, at denne Regel virkelig tilfredsstiller det associative Princip.

24. Vi har hidtil kun stillet den Kontinuitetsfordring, at Produktet skal afhænge kontinuert af Multiplikanden; forlanger man tillige, at det skal afhænge kontinuert af Multiplikator, da kan der aabenbart ikke baade eksistere Nulmultiplikatorer og andre Multiplikatorer. Thi en kontinuert Overgang mellem en Nulmultiplikator M og en anden Multiplikator N, idet Multiplikanden er et konstant ordinært Numeral $(\alpha, \beta)_\lambda$, vilde ikke kunne give nogen kontinuert Overgang i Produktet, da $M \cdot (\alpha, \beta)_\lambda$ er 0, medens $N \cdot (\alpha, \beta)_\lambda$ har Formen $(\alpha', \beta')_\lambda$. Altsaa:

Skal det første distributive Princip gælde, og skal Produktet afhænge kontinuert saa vel af Multiplikator som af Multiplikand, da kan det associative Princip ikke tilfredsstilles for andre Multiplikationsregler end disse:

1) Alle Produkter $= 0$.

2) Ethvert Produkt $=$ Multiplikanden.

Om Numeralernes geometriske Betydning.

25. Hvad den geometriske Betydning af de lineære Transformationer angaar, er der ikke meget at sige ud over det velkendte. Gruppen af lineære Transformationer kan siges at fremstille den Gruppe af projektive Transformationer, som lader et Keglesnit invariant, altsaa Gruppen af Bevægelsestransformationer i den ikke-Euklidiske Plan. Vil man altsaa forsøge at regne med ikke-Euklidiske Bevægelsestransformationer som Numeraler, saaledes at Addition bestemmes ved Bevægelsernes Sammensætning, da er det i Følge det foregaaende umuligt at finde én til denne Addition svarende tilfredsstillende Multiplikation.

26. En anden geometrisk Fortolkning kan man faa paa følgende Maade: Til Transformationerne $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ .... lader vi i det Euklidiske 3-dimensionale Rum svare saadanne Punkter A, A_1, A_2 ...., hvis Koordinater i et sædvanligt tetraedralt Koordinatsystem er henholdsvis $(a : b : c : d)$, $(a_1 : b_1 : c_1 : d_1)$, $(a_2 : b_2 : c_2 : d_2)$, ...; til Identitetstransformationen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ svarer altsaa et Punkt O med Koordinaterne $(1 : 0 : 0 : 1)$.

Alle Numeralerne bliver altsaa én-éntydig fremstillede ved Rummets Punkter men de Punkter $(a : b : c : d)$, der tilfredsstiller Ligningen

$$ad - bc = 0,$$

svarer ikke til egentlige Transformationer.

Den Flade af 2. Orden, som fremstilles ved denne Ligning, kalder vi **Fundamentalfladen**; den indeholder 2 Systemer af rette Linier, fremstillede ved de to Systemer af Ligninger:

$$ka + b = 0,\quad kc + d = 0 \quad \text{(Systemet af 1. Art)}$$

og

$$ka + c = 0,\quad kb + d = 0 \quad \text{(Systemet af 2. Art)},$$

hvor k er en variabel Parameter.

Har man nu:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

kan man udlede en geometrisk Afhængighed mellem de til Numeralerne svarende Punkter A_1, A og A_2, samt det til Identitetsnumeralet svarende Punkt O.

Man har nemlig

$$\frac{aa_1 + cb_1}{a_2} = \frac{ba_1 + db_1}{b_2} = \frac{ac_1 + cd_1}{c_2} = \frac{bc_1 + dd_1}{d_2}.$$

Lader man altsaa A ligge fast, medens A_1, altsaa ogsaa A_2, varierer, da definerer disse Ligninger en bestemt Kollineation, i hvilken A_1 svarer til A_2; i denne Kollineation vil Fundamentalfladen svare til sig selv. Har man nemlig $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0$, da er ogsaa $a_2 d_2 - b_2 c_2 = (ad - bc)(a_1 d_1 - b_1 c_1) = 0$ og omvendt (da $ad - bc \neq 0$). De Punkter $(a_1 : b_1 : c_1 : d_1)$, som svarer til sig selv i den omtalte Kollineation, bestemmes ved Ligningerne:

$$a + c \cdot \frac{b_1}{a_1} = b \cdot \frac{a_1}{b_1} + d = a + c \cdot \frac{d_1}{c_1} = b \cdot \frac{c_1}{d_1} + d,$$

der kan skrives paa Formen:

$$ka_1 + b_1 = 0\,,\; kc_1 + d_1 = 0\,,$$

idet k er Rod i Ligningen

$$ck^2 + k(d-a) - b = 0.$$

Altsaa vil Kollineationen lade alle Punkter paa 2 bestemte Frembringere af 1ste Art være invariante.

Linien $A_1 A_2$ maa derfor stadig skære disse 2 Frembringere, og dersom Skæringspunkterne betegnes med U og V, har man, at Dobbeltforholdet $(A_1 A_2 U V)$ er konstant.

Heraf følger nu for det første, at dersom O, A og A_1 ligger paa en ret Linie, da ligger A_2 paa den samme Linie, og $(A_1 A_2 U V) = (O A U V)$, idet U og V er den rette Linies Skæringspunkter med Fladen.

Dernæst ses det, at dersom O, A og A_1 ikke ligger paa samme rette Linie, da kan Afhængigheden mellem O, A, A_1 og A_2 udtrykkes saaledes:

OA og $A_1 A_2$ skærer de samme 2 Frembringere af første Art paa Fundamentalfladen og deles af disse i lige store Dobbeltforhold.

Idet Fladen opfattes som Fundamentalflade i en Cayley'sk Maalgeometri, vil vi, i Overensstemmelse med Clifford's bekendte Definition af parallele Linier, kalde 2 rette Linier parallele af $\begin{Bmatrix}\text{1ste}\\ \text{2den}\end{Bmatrix}$ Art, naar Linierne skærer de samme 2 Frembringere af $\begin{Bmatrix}\text{1ste}\\ \text{2den}\end{Bmatrix}$ Art. Man ser da, at Firkanten $O A A_2 A_1$ har den Egenskab, at det ene Par modstaaende Sider *OA* og $A_1 A_2$ er parallele af første Art; efter den sædvanlige Maalbestemmelse er tillige Maalene for *OA* og $A_1 A_2$ lige store. Heraf følger nu, at det andet Par modstaaende Sider OA_1 og AA_2 bliver parallele af 2. Art og har samme Maal. (Dette kunde ogsaa let vises direkte, ganske som for det første Par). Firkanten kan kaldes et ikke-Euklidisk Parallelogram.

Til Numeralerne $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, ... svarer altsaa ikke-Euklidiske Vektorer OA, OA_1, ... udgaaende fra samme Punkt O, og til Addition af 2 Numeraler svarer Sammensætning af Vektorerne til én Vektor bestemt som Diagonal i de givne Vektorers ikke-Euklidiske Parallelogram. (Der er i Almindelighed 2 Parallelogrammer, svarende til de 2 Muligheder for Addendernes Orden). Naar man adderer ikke-Euklidiske Vektorer paa denne Maade, er det altsaa umuligt i Tilknytning til denne Addition at opstille en tilfredsstillende Multiplikationsregel.

TILLÆG.

Om Tal med ikke-kommutativ Addition.

27. Som det fremgaar af det foregaaende, fører de lineære Transformationer ikke til et System af Numeraler, til hvis Addition der kan knyttes en brugelig Multiplikation, og Spørgsmaalet om Eksistensen af Tal med ikke-kommutativ Addition er altsaa endnu ubesvaret. Her skal vi nu til Slut gøre et Par almindelige Bemærkninger om dette Spørgsmaal.

Forlanger man, at Tallene, foruden den omhandlede Art af Addition, skal have en Multiplikation, der tilfredsstiller det første distributive Princip, som udtrykkes ved Ligningen

$$m(a+b) = m \cdot a + m \cdot b \quad \text{(I)},$$

og tillige, at der eksisterer en bestemt Enhed 1, hvis Modsætning (-1) tilfredsstiller Ligningen

$$a(-1) = (-1) \cdot a = -a \quad \text{(II)},$$

da kan det bevises, at Tallene ikke eksisterer.

Af I følger nemlig for $m = -1$:

$$(-1)(a+b) = (-1)a + (-1)b,$$

hvoraf ved Anvendelse af II

$$(-b) + (-a) = (-a) + (-b),$$

d. v. s. Additionen maatte være kommutativ.

For Tal med ikke-kommutativ Addition kan altsaa Ligningen $a \cdot (-1) = (-1) \cdot a$ ikke tilfredsstilles for enhver Værdi af a; hvis saadanne Tal skal have en i Almindelighed éntydig Division, maa der til ethvert a i Almindelighed svare en bestemt Multiplikator m_a, som gør

$$m_a \cdot a = -a.$$

Denne Multiplikator (Modsætningsmultiplikatoren til a) er altsaa ikke konstant, men i Almindelighed afhængig af a.

28. Dernæst kan det bevises, at naar man forlanger det første distributive Princip tilfredsstillet, og fordrer, at Division af første Art, i hvert Fald for én Divisor, skal være éntydig, da kan hverken det andet distributive Princip eller Multiplikationens kommutative Princip tilfredsstilles.

Af det første distributive Princip følger nemlig:

$$m \cdot 0 = m\big((-a) + a\big) = m(-a) + m \cdot a,$$

altsaa

$$m(-a) = -(ma).$$

Dernæst vilde det andet distributive Princip give:

$$(a+b)\cdot(-m) = a\cdot(-m)+b\cdot(-m),$$

altsaa

$$(a+b)\cdot(-m) = -(am)+\big(-(bm)\big) = -(bm+am),$$

men da tillige

$$-(bm+am) = -\big((b+a)m\big)$$

(i Følge det andet distributive Princip), vilde man faa:

$$(a+b)(-m) = (b+a)(-m),$$

der, naar Division med $(-m)$ skulde være éntydig, vilde medføre, at

$$a+b = b+a.$$

Da det andet distributive Princip altsaa ikke kan tilfredsstilles, gælder det samme om det kommutative Princip.

29. Den Omstændighed, at det andet distributive Princip i Almindelighed ikke gælder, vil medføre den Mærkelighed, at Tallenes Additionsregel kan forandres paa uendelig mange Maader, uden at Multiplikationsregelen forandres.

Vi gaar ud fra, at der foreligger et bestemt System af Tal med ikke-kommutativ Addition, og med en Multiplikation, der følger det første distributive Princip, samt det associative Princip, og forudsætter tillige, at der er i Almindelighed éntydig Reciprocitet; Operationstegnene for den forelagte Addition, Multiplikation og Division er de sædvanlige. Det er da muligt at indføre en ny Art af Tilføjelse i Stedet for den givne Addition paa følgende Maade. Tegnet for den ny Tilføjelse er $*$, og man sætter

$$a*b = (a\cdot k+b\cdot k)\cdot\frac{1}{k},$$

hvor k er et vilkaarligt konstant Tal i Systemet.

Man faar da:

$$a*(b*c) = a*(bk+ck)\cdot\frac{1}{k} = \Big(ak+(bk+ck)\frac{1}{k}\cdot k\Big)\frac{1}{k},$$

altsaa

$$a*(b*c) = (ak+bk+ck)\cdot\frac{1}{k} = (a*b)*c),$$

hvoraf det fremgaar, at den ny Addition følger det associative Princip.

Multiplikationen bibeholdes, og man faar da:

$$m\cdot(a*b) = m\cdot(a\cdot k+b\cdot k)\cdot\frac{1}{k} = (ma\cdot k+mb\cdot k)\cdot\frac{1}{k},$$

altsaa:

$$m\cdot(a*b) = (ma*mb)$$

ɔ: det distributive Princip gælder ogsaa efter Indførelsen af den ny Addition.

Multiplikationens associative Princip kan ikke paavirkes af Additionsreglen.

Det bemærkes, at den omtalte nye Addition, som er bestemt ved det konstante Tal k, for $k=-1$ vil blive

$$a*b = b+a.$$

30. Vil man opstille Eksempler paa Tal med ikke-kommutativ Addition, vilde det i Tilslutning til Indledningen være naturligt at søge Transformationsgrupper, der ikke indeholder cykliske Transformationer, og hvor Sammensætningen af 2 Transformationer i Almindelighed ikke er kommutativ. Det simpleste Eksempel paa en saadan Transformationsgruppe i Planen er den projektive Gruppe med et 3-dobbelt fast Punkt. Vælger vi dette uendelig fjærnt, kan Transformationerne fremstilles ved Ligningerne:

$$x = x' + a,$$
$$y = y' + b + cx',$$

hvor (x', y') og (x, y) er Parallelkoordinater til henholdsvis det givne Punkt og det transformerede Punkt, medens a, b og c er Konstanter.

Transformationen kan betegnes ved Tegnet (a, b, c), og Loven for Addition af 2 saadanne Numeraler (a, b, c) og (a_1, b_1, c_1) bliver da:

$$(a, b, c) + (a_1, b_1, c_1) = (a + a_1, b + b_1 + a_1 c, c + c_1).$$

Additionen er altsaa kun kommutativ, naar $a_1 c = a c_1$. Identiteten bestemmes ved $(0, 0, 0)$, og Modsætningen angives ved Ligningen:

$$\div (a, b, c) = (-a, ac - b, -c).$$

Søger man nu en Multiplikationsregel, der tilfredsstiller det første distributive Princip og det associative Princip, finder man let følgende Form for Produktet:

$$(m, n, p) \cdot (a, b, c) = (ma, mpb + nc, pc).$$

Denne Multiplikationsregel giver

$$\begin{aligned}(m, n, p) \cdot \big((a, b, c) + (a_1, b_1, c_1)\big) &= (m, n, p) \cdot (a + a_1, b + b_1 + a_1 c, c + c_1) \\ &= \big(m(a + a_1), mp(b + b_1) + mpa_1 c + n(c + c_1), p(c + c_1)\big),\end{aligned}$$

hvilket netop er Summen af de to Produkter $(m, n, p) \cdot (a, b, c)$ og $(m, n, p)(a_1, b_1, c_1)$; altsaa gælder det første distributive Princip. Det associative Princip viser sig ogsaa at gælde.

Reciprociteten (Divisionen) er i Almindelighed mulig og éntydig; men der gives dog Undtagelser, idet et Produkt kan antage Formen $(0, 0, 0)$, uden at nogen af Faktorerne antager denne Form. Der eksisterer altsaa „Nuldivisorer".

31. Man kan udvide det fundne Eksempel, idet vi betragter den Gruppe af Jonquières-Transformationer, der bestemmes ved Ligningerne:

$$x = x' + a_1,$$
$$y = y' + a_2 + a_3 x' + a_4 x'^2 + \ldots + a_n x'^{n-2}.$$

Additionsreglen bliver her:

$$(a_1, a_2, \ldots a_n) + (b_1, b_2, \ldots b_n) = (c_1, c_2, \ldots c_n),$$

idet

$$
\begin{aligned}
c_1 &= b_1 + a_1 \\
c_2 &= b_2 + a_2 + b_1 a_3 + b_1^2 a_4 + \ldots + b_1^{n-2} a_n \\
c_3 &= b_3 + a_3 + 2b_1 a_4 + 3b_1^2 a_5 + \ldots + (n-2) b_1^{n-3} a_n \\
c_4 &= b_4 + a_4 + 3b_1 a_5 + \ldots\ldots + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} b_1^{n-4} a_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_n &= b_n + a_n
\end{aligned}
$$

Til denne Addition kan knyttes følgende Multiplikationsregel:

$$(p_1, p_2, \ldots p_n) \cdot (a_1, a_2, \ldots a_n) = (q_1, q_2, \ldots q_n),$$

idet

$$
\begin{aligned}
q_1 &= p_1 a_1 \\
q_2 &= p_1^{n-2} p_n a_2 + \alpha \cdot p_1^{n-3} p_{n-1} a_3 + \beta \cdot p_1^{n-4} p_{n-2} a_4 + \gamma \cdot p_1^{n-5} p_{n-3} a_5 + \cdots + p_2 a_n \\
q_3 &= p_1^{n-3} p_n a_3 + 2\alpha p_1^{n-4} p_{n-1} a_4 + 3\beta p_1^{n-5} p_{n-2} a_5 + 4\gamma p_1^{n-6} p_{n-3} a_6 + \cdots + p_3 a_n \\
q_4 &= p_1^{n-4} p_n a_4 + 3\alpha p_1^{n-5} p_{n-1} a_5 + 6\beta p_1^{n-6} p_{n-2} a_6 + 10\gamma p_1^{n-7} p_{n-3} a_7 + \cdots + p_4 a_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_{n-1} &= p_1 p_n a_{n-1} + (n-2) \alpha p_{n-1} a_n \\
q_n &= p_n a_n
\end{aligned}
$$

Denne Regel findes derved, at man forlanger det distributive Princip tilfredsstillet; derefter viser det sig, at det associative Princip bliver tilfredsstillet, naar man sætter

$$\alpha = \frac{1}{n-2}, \quad \beta = \frac{1 \cdot 2}{(n-2)(n-3)}, \quad \gamma = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(n-2)(n-3)(n-4)}, \quad \text{o. s. v.}$$

Her er altsaa et Eksempel paa „n-dimensionale" Tal med ikke-kommutativ Addition; der er kun den Mangel ved Systemet, at der forekommer Nuldivisorer.

Sætter man $a_n = a_1$, $b_n = b_1$, o. s. v. og beholder de ovenstaaende Regneregler, kan man udelade $a_n, b_n, \ldots$, og Systemet reduceres da til et System af $(n-1)$-dimensionale Tal: $(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$, $(b_1, b_2, \ldots b_{n-1})$, ... med ikke-kommutativ Addition (for $n > 3$). Dette System er noget simplere, idet Nuldivisorernes Gruppe bliver meget simpel.

Tallet $(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$ er nemlig kun Nuldivisor, naar $a_1 = 0$.

De eneste Tal, hvis reciproke Tal ikke eksisterer, er Nuldivisorerne.

Summen af 2 Nuldivisorer er atter en Nuldivisor.

Et Produkt kan kun blive Nul, naar enten 1) begge Faktorerne er Nuldivisorer, eller 2) mindst én af Faktorerne er Nul.

Vi skal ikke gøre nærmere Rede for de fundne Tals Egenskaber, men kun bemærke, at Regning med disse Tal næppe vil være uden Interesse; enhver Identitet mellem Tallene giver nemlig umiddelbart en Mængde algebraiske Identiteter.